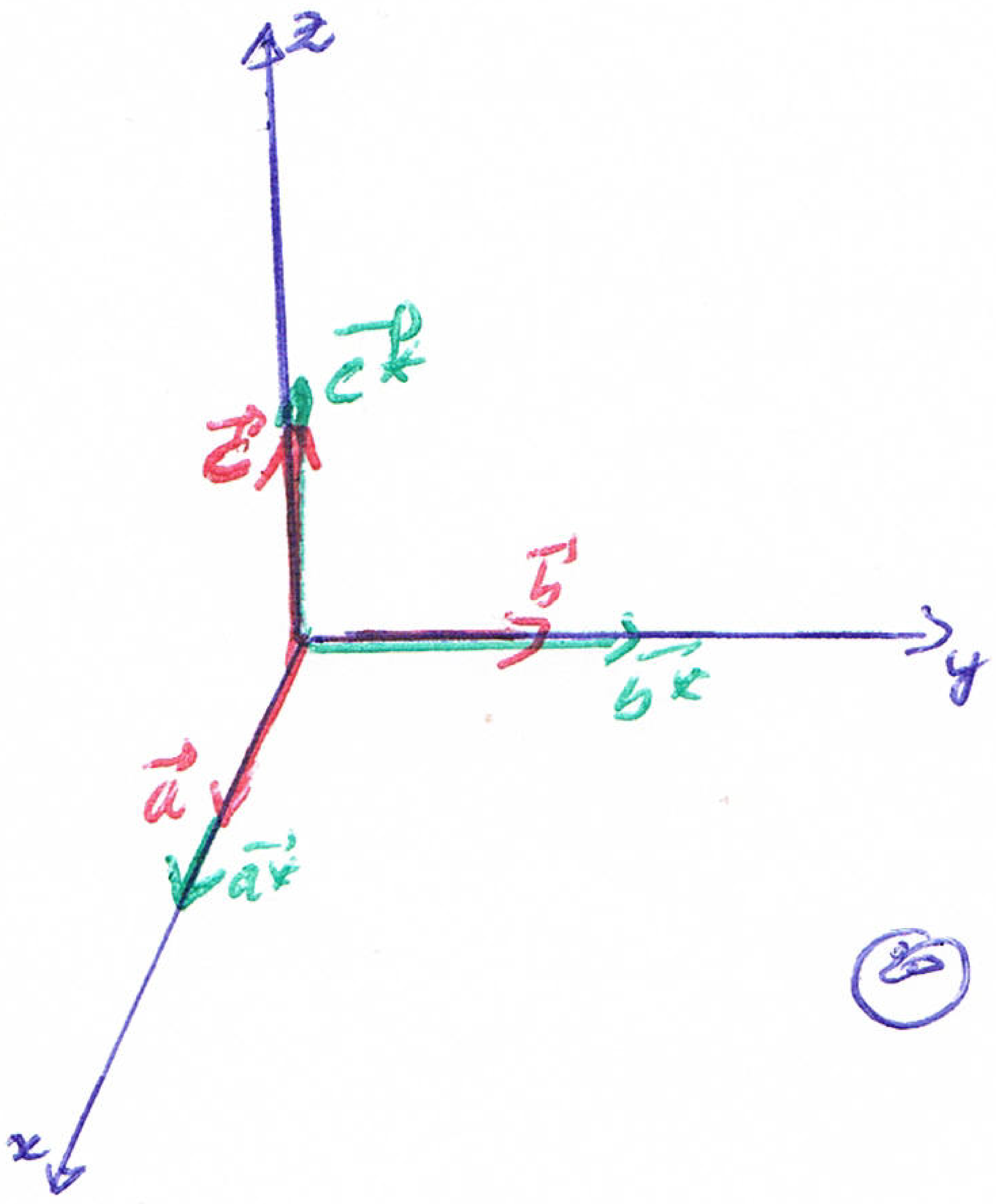
Corrigé du TD N° II : le réseau réciproque

Exo I : réseau cubique $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $a = b = c = a$; $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = \pi/2$



1°) Détermination du réseau réciproque

$$\vec{a}^* = \frac{1}{V_0}\vec{b}\wedge\vec{c} = \frac{1}{a^3}\left(a\vec{j}\wedge a\vec{k}\right) = \frac{1}{a}\vec{j}\wedge\vec{k} = \frac{1}{a}\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{a}^* = \frac{1}{a}\vec{i}}$$

Le même type de calcul donne $\boxed{\vec{b}^* = \frac{1}{a}\vec{j} \text{ et } \vec{c}^* = \frac{1}{a}\vec{k}}$

$\Rightarrow a^* = b^* = c^* = \frac{1}{a}$ $\quad (\vec{a}^*, \vec{b}^*) = (\vec{a}^*, \vec{c}^*) = (\vec{b}^*, \vec{c}^*) = \pi/2$

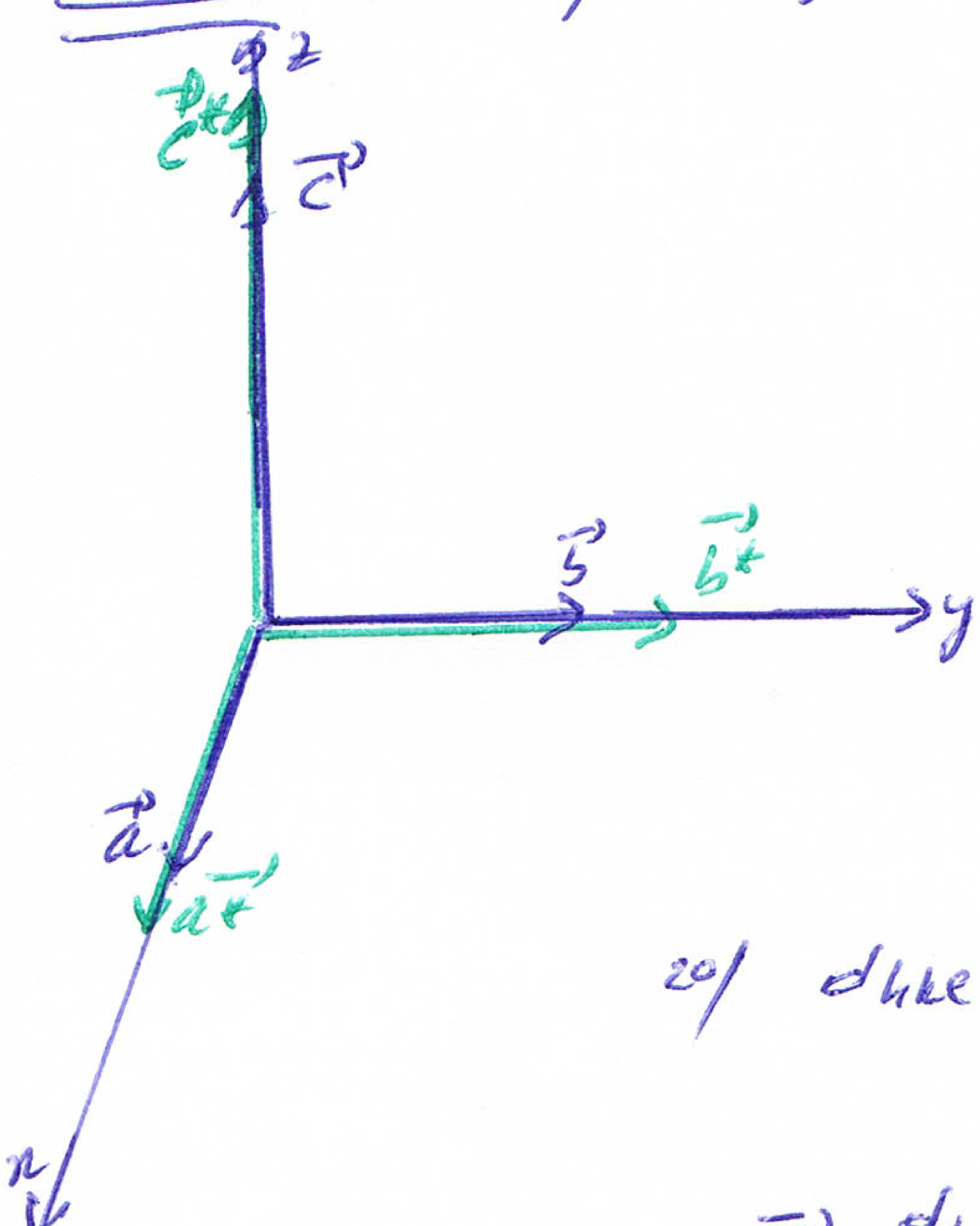
$\Rightarrow$ le réseau réciproque d'1 réseau cubique est cubique

2°) $d_{hkl} = \dfrac{1}{n^*_{hkl}}$ avec $\vec{n}^*_{hkl} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$ $\Rightarrow$

$$d_{hkl} = \frac{1}{\sqrt{\vec{n}^*_{hkl}\cdot\vec{n}^*_{hkl}}} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$$

$$\boxed{d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}}$$

Exo II : réseau quadratique $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $a = b = a \neq c$ $\quad (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = \pi/2$



1°) DÉTERMINATION du R. réciproque

$\vec{a}^* = \frac{1}{V_0}(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \frac{a.c}{a^2c}\vec{j}\wedge\vec{k} = \frac{1}{a}\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{a}^* = \frac{1}{a}\vec{i}}$

$\vec{b}^* = \frac{1}{V_0}(\vec{c}\wedge\vec{a}) = \frac{ca}{a^2c}(\vec{k}\wedge\vec{i}) = \frac{1}{a}\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{b}^* = \frac{1}{a}\vec{j}}$

$\vec{c}^* = \frac{1}{V_0}\vec{a}\wedge\vec{b} = \frac{a^2}{a^2c}(\vec{i}\wedge\vec{j}) = \frac{1}{c}\vec{k} \Rightarrow \boxed{c^* = \frac{1}{c}\vec{k}}$

$\Rightarrow (\vec{a}^*, \vec{b}^*) = (\vec{a}^*, \vec{c}^*) = (\vec{b}^*, \vec{c}^*) = \pi/2$

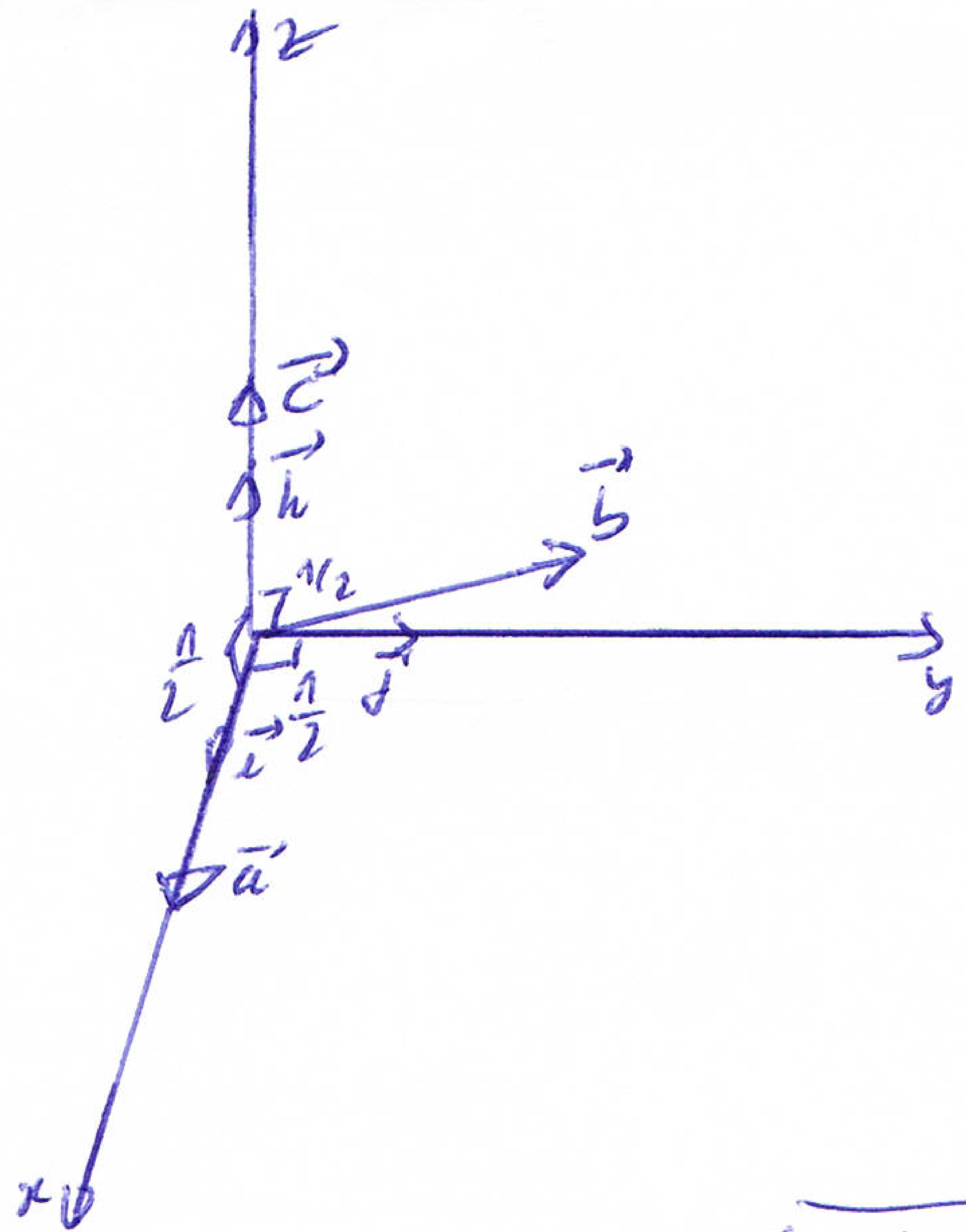
$a^* = b^* \neq c^*$ $\Rightarrow$ Le R. réciproque est QUADRATIQUE

2°/ $d_{hkl} = \dfrac{1}{n^*_{hkl}}$ avec $\vec{n}^*_{hkl} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$

$$\Rightarrow d_{hkl} = \frac{1}{\sqrt{\vec{n}^*_{hkl}\cdot\vec{n}^*_{hkl}}} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+\frac{a^2}{c^2}l^2}}$$

$$\boxed{d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+\frac{a^2}{c^2}l^2}}}$$

Exo III : réseau hexagonal $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ $\quad a = b \neq c$ $\quad (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$; $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$



$\vec a = a\vec i \qquad \vec b = \left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)\vec i + \left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)\vec j \qquad \vec c = c.\vec k$

$\Rightarrow \vec a^* = \frac{1}{v_0}\,\vec b\wedge\vec c$ avec $v_0 = \vec a\cdot(\vec b\wedge\vec c)$

$$\vec b\wedge\vec c = \begin{pmatrix}-a/2\\ \frac{a\sqrt3}{2}\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 0\\ c\end{pmatrix} =$$

$$\vec b\wedge\vec c = \begin{pmatrix}\frac{ac\sqrt3}{2}\\ \frac{ac}{2}\\ 0\end{pmatrix} ; \qquad \vec a = \begin{pmatrix}a\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$v_0 = \frac{a^2c\sqrt3}{2} \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{a^2c\sqrt3}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec a^* = \frac{\vec i}{a} + \frac{\vec j}{a\sqrt3}}$$

$$\vec b^* = \frac{1}{v_0}\,\vec c\wedge\vec a = \frac{2}{a^2c\sqrt3}\,ac\,\vec k\wedge\vec i = \frac{2}{a\sqrt3}\vec j \qquad \boxed{\vec b^* = \frac{2}{a\sqrt3}\vec j}$$

$$\vec c^* = \frac{1}{v_0}\,\vec a\wedge\vec b = \frac{2}{a^2c\sqrt3}\,a\vec i\wedge\left(-\frac a2\vec i + \frac{a\sqrt3}{2}\vec j\right) = \frac{2}{a^2c\sqrt3}\left[\frac{a^2\sqrt3}{2}\vec k\right) = \frac1c\vec k$$

$$\boxed{\vec c^* = \frac1c\vec k}$$

on voit que $a^* = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}} = \sqrt{\frac{4}{3a^2}} = \frac{2}{a\sqrt3} = b^* = \frac{2}{a\sqrt3} \neq c^* = \frac1c$

$$\cos(\vec a^*,\vec c^*) = \frac{\vec a^*\cdot\vec c^*}{a^*\cdot c^*} = 0 \qquad \cos(\vec b^*,\vec c^*) = \frac{\vec b^*\cdot\vec c^*}{b^*\cdot c^*} = 0$$

$$(\vec a^*,\vec c^*) = (\vec b^*,\vec c^*) = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\vec a^*,\vec b^*) = \frac{\vec a^*\cdot\vec b^*}{a^*\cdot b^*} = \frac12 \Rightarrow \left(\vec a^*,\vec b^* = \frac{\pi}{3}\right)$$ ⇒ le Réciproque est lui aussi hexagonal

3) $$d_{hkl} = \frac{1}{n^*_{hkl}} = \frac{1}{\sqrt{\vec n_{hkl}\cdot\vec n_{hkl}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac ha\vec i + \frac{h+2k}{a\sqrt3}\vec j + \frac1c\vec k\right)\left(\frac ha\vec i + \frac{h+2k}{a\sqrt3}\vec j + \frac lc\vec k\right)}}$$

$$\boxed{d_{hkl} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3a^2}(h^2+k^2+hk) + \frac{l^2}{c^2}}}}$$

EXO IV 1) $(hkl) \,//\, [1\,2\,0]$ et $[1\,0\,\bar2]$ $\Rightarrow \frac{h}{-4} = \frac{k}{2} = \frac{l}{-2}$

$$\Rightarrow \boxed{(hkl) = (\bar2\,1\,\bar2)}$$

2) $[uvw] \,//\, (320)$ et $(30\bar2)$ $\Rightarrow \frac{u}{\ } = \frac{v}{\ } = \frac{w}{\ }$